

数学 C | 複素数平面

155 a を定数とし、 $\alpha = 1 - 2i$, $\beta = a + 6i$ とする。

複素数平面上の3点 0 , α , β が一直線上にあるとき、 $a =$ である。

【解答】 $a = -3$

詳しい解説



156 複素数 $z = 1 - 2i$ について、複素数平面上で点 z と次のものに関して対称な点を表す複素数を求めよ。

(1) 実軸に関して対称な点は = + i

(2) 原点に関して対称な点は = + i

(3) 虚軸に関して対称な点は = - i

選択肢：① z ① $\bar{z}$ ② $-z$ ③ $-\bar{z}$

【解答】 (1) ① $\bar{z} = 1 + 2i$ (2) ② $-z = -1 + 2i$
(3) ③ $-\bar{z} = -1 - 2i$

詳しい解説



157 次の複素数の絶対値と、2点間の距離を求めよ。

$$(1) |1 - 2i| = \sqrt{\boxed{\text{ア}}} \quad |4 + 3i| = \boxed{\text{イ}}$$

$$|-1| = \boxed{\text{ウ}} \quad |4i| = \boxed{\text{エ}}$$

(2) 複素数平面上の2点 $\alpha = 1 - 2i$, $\beta = 4 + 3i$ 間の距離は $\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

158 次の複素数について、それぞれの値を求めよ。

(1) $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$, $|\alpha + \beta| = 4$ のとき、

$$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = \boxed{\text{ア}} \text{ であり、} |\alpha - \beta| = \sqrt{\boxed{\text{イウ}}} \text{ である。}$$

$$(2) |\gamma| = 3, |\gamma + 2| = 2 \text{ のとき、} \gamma + \bar{\gamma} = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \text{。}$$

【解答】 (1) $\sqrt{5}$, 5, 1, 4 (2) $\sqrt{34}$

詳しい解説



【解答】 (1) 3, $\sqrt{10}$ (2) $-\frac{9}{2}$

詳しい解説



159 次の問いに答えよ。

(1) 絶対値 6、偏角 $\frac{5}{6}\pi$ の複素数は $\boxed{\text{アイ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{エ}}i$ である。

(2) 次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$$1 + \sqrt{3}i = \boxed{\text{オ}} \left(\cos \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}} + i \sin \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}} \right)$$

$$-1 - i = \sqrt{\boxed{\text{キ}}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi \right)$$

$$-2i = \boxed{\text{コ}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi \right)$$

【解答】 (1) $-3\sqrt{3} + 3i$

$$(2) 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$-1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)$$

$$-2i = 2 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)$$

詳しい解説



160 $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$, $\beta = 2 + 2i$ とする。次の複素数を極形式で表せ。

ただし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$$\alpha\beta = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}} \pi \right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}} \left(\cos \frac{\pi}{\boxed{\text{クケ}}} + i \sin \frac{\pi}{\boxed{\text{クケ}}} \right)$$

【解答】 $\alpha\beta = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi \right)$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

詳しい解説



161 複素数平面上の点 z について、次の点はそれぞれ点 z をどのように移動した点かを答えよ。ただし、回転する角 θ は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

(1) 点 $(1 + \sqrt{3}i)z$ は、点 z を原点を中心に $\frac{\pi}{\text{ア}}$ だけ回転し、

原点からの距離を イ 倍にした点である。

(2) 点 $(3 - \sqrt{3}i)z$ は、点 z を原点を中心に $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ π だけ回転し、

原点からの距離を $\text{カ}\sqrt{\text{キ}}$ 倍にした点である。

(3) 点 $\frac{z}{i}$ は、点 z を原点を中心に $\frac{\text{クケ}}{\text{コ}}$ π だけ回転した点である。

162 次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 点 $1 + \sqrt{3}i$ を原点 O を中心に

$\frac{\pi}{6}$ だけ回転させた点は $\text{ア}i$ であり、

$\frac{3}{2}\pi$ だけ回転させた点は $\sqrt{\text{イ}} - i$ である。

(2) $\alpha = 2 - 3i$, $\beta = 1 + 4i$ とする。点 β を点 α を中心として

$\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると、 $\gamma = \text{ウエ} - \text{オ}i$ である。

【解答】(1) $\frac{\pi}{3}$ 回転、距離 2 倍

(2) $\frac{-1}{6}\pi$ 回転、距離 $2\sqrt{3}$ 倍

(3) $\frac{-1}{2}\pi$ 回転

詳しい解説



【解答】(1) $2i$, $\sqrt{3} - i$ (2) $\gamma = -5 - 4i$

詳しい解説



163 次の問いに答えよ。

(1) $(1 + \sqrt{3}i)^9 =$

(2) $(2 - 2i)^5 =$ $+$ i

(3) $(1 + i)^n$ が実数となる最小の自然数 n は $n =$ である。

(4) $(\sqrt{3} - i)^n$ が純虚数となる最小の自然数 n は $n =$ である。

164 方程式 $z^3 = 8i$ の解は、

$z = \sqrt{\text{ア}} + i, \text{イ}\sqrt{\text{ウ}} + i, \text{エオ}i$ である。

【解答】 (1) -512 (2) $-128 + 128i$

(3) $n = 4$ (4) $n = 3$

詳しい解説



【解答】 $z = \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$

詳しい解説



165 $z = \cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi$ のとき、 $z^5 = \boxed{\text{ア}}$ であり、

$z^5 - \boxed{\text{ア}} = 0$ として左辺を因数分解すると、

$$(z - \boxed{\text{イ}})(z^4 + z^3 + z^2 + z + \boxed{\text{ウ}}) = 0$$

これより、 $z \neq 1$ であるから、

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \boxed{\text{エ}}$$
 である。

166 複素数平面上の 3 点 $A(2 - 3i)$ 、 $B(1 + 4i)$ 、 $C(3 + 2i)$ について、

次の点を表す複素数は、

線分 AB を 2 : 3 に内分する点 $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}i$ 、

線分 AB を 2 : 3 に外分する点 $\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カキ}}i$ 、

3 点を頂点とする三角形の重心 $G \boxed{\text{ク}} + i$ である。

【解答】 $z^5 = 1$ $(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$
 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

詳しい解説



【解答】 内分 $\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$ 外分 $4 - 17i$
 重心 $G \ 2 + i$

詳しい解説



167 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形を表すか。

(1) $|z + 2 - 3i| = 1$ は、

点 $\boxed{\text{アイ}}$ + $\boxed{\text{ウ}}$ i を中心とする半径 $\boxed{\text{エ}}$ の円を表す。

(2) $(z - i)(\bar{z} + i) = 4$ は、 $|z - i|^2 = \boxed{\text{オ}}$ と変形できるから、

点 i を中心とする半径 $\boxed{\text{カ}}$ の円を表す。

(3) $|z + 2 - 3i| = |z + i|$ は、

2 点 $A(\boxed{\text{キク}} + \boxed{\text{ケ}}i)$, $B(\boxed{\text{コ}}i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線を表す。

(4) $2|z - i| = |z + 2i|$ は、

点 $\boxed{\text{サ}}i$ を中心とする半径 $\boxed{\text{シ}}$ の円を表す。

168 $\omega = 2 + iz$ として、点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、

$|z| = \boxed{\text{ア}}$ であるので、 $|\omega - \boxed{\text{イ}}| = \boxed{\text{ウ}}$

よって、点 ω は、点 $\boxed{\text{エ}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{オ}}$ の円を描く。

【解答】(1) 点 $-2 + 3i$ 中心、半径 1 の円

(2) $|z - i|^2 = 4$ 点 i 中心、半径 2 の円

(3) 2 点 $A(-2 + 3i)$, $B(-i)$ を結ぶ線分 AB の
垂直二等分線

(4) 点 $2i$ 中心、半径 2 の円

詳しい解説



【解答】 $|z| = 1$ $|\omega - 2| = 1$

点 2 中心、半径 1 の円

詳しい解説



169 $|z - (4 + 3i)| = 2$ を満たす点 z は、

点 $\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}i$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円を描く。

また、原点 O と点 $4 + 3i$ との距離は $\boxed{\text{エ}}$ であるので、

$|z|$ は最大値 $\boxed{\text{オ}}$ 、最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

170 $\alpha = 1 + i$, $\beta = 3 - 2i$, $\gamma = 2 + 6i$ であるとき、

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \boxed{\text{アイ}} + i \text{ である。}$$

これより、 $-\pi < \angle\beta\alpha\gamma \leq \pi$ とするとき、 $\angle\beta\alpha\gamma = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である。

【解答】 点 $4 + 3i$ 中心、半径 2 の円 距離 5
最大値 7、最小値 3

詳しい解説



【解答】 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -1 + i$ $\angle\beta\alpha\gamma = \frac{3}{4}\pi$

詳しい解説



171 x を実数とし、3 点 $A(1+i)$, $B(3-2i)$, $C(x+2i)$ をとる。

$\alpha = 1+i$, $\beta = 3-2i$, $\gamma = x+2i$ とすると、

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\boxed{\text{ア}}x - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}x - \boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}i$$

よって、3 点 A , B , C が一直線上にあるとき $x = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

また、2 直線 AB と AC が垂直に交わる時 $x = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

172 複素数平面上の三角形の形状について考える。

(1) 異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が $\gamma = (1 + \sqrt{3}i)\beta - \sqrt{3}i\alpha$ を

満たすとき、 $\gamma - \alpha = (\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}i)(\beta - \alpha)$ と変形できるので、

$$\left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = \boxed{\text{ウ}}, \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}} \text{ である。}$$

よって、 $AB : AC : BC = 1 : \boxed{\text{オ}} : \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ となり、

$\triangle ABC$ は $\angle B = \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}$ の直角三角形である。

(2) 0 でない複素数 α , β について、

3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を頂点とする三角形 OAB が

$$\angle AOB = \frac{\pi}{4}, \frac{OA}{OB} = \sqrt{2} \text{ を満たすとき、}$$

$$\alpha^2 - \boxed{\text{ク}}\alpha\beta + \boxed{\text{ケ}}\beta^2 = 0 \text{ が成り立つ。}$$

【解答】 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{2x - 5}{13} + \frac{3x - 1}{13}i$

一直線上 $x = \frac{1}{3}$ 垂直 $x = \frac{5}{2}$

詳しい解説



【解答】 (1) $\gamma - \alpha = (1 + \sqrt{3}i)(\beta - \alpha)$ 絶対値 2、偏角 $\frac{\pi}{3}$

$$AB : AC : BC = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

$$\angle B = \frac{\pi}{2} \text{ の直角三角形}$$

$$(2) \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$$

詳しい解説

