

数学 II | 複素数と方程式

13 次の計算をせよ。ただし、 i は虚数単位とする。

$$(1) (2 - 3i) - (1 + 5i) = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}i$$

$$(2) (2 - 3i)(1 + 5i) = \boxed{\text{ウエ}} + \boxed{\text{オ}}i$$

$$(3) \frac{2 + i}{2 - i} = \frac{\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}i}{\boxed{\text{ク}}}$$

$$(4) \sqrt{-9} + \sqrt{-4} = \boxed{\text{ケ}}i$$

$$(5) \sqrt{-6} \times \sqrt{-3} = \boxed{\text{コサ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

14 等式 $(x - y) + (y - 4)i = 2 - 3i$ を満たす実数 x, y の値は

$$x = \boxed{\text{ア}}, y = \boxed{\text{イ}} \text{ である。}$$

【解答】 (1) $1 - 8i$ (2) $17 + 7i$ (3) $\frac{3 + 4i}{5}$

(4) $5i$ (5) $-3\sqrt{2}$

詳しい解説



【解答】 $x = 3, y = 1$

詳しい解説



15 2乗すると $3 - 4i$ となる複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) について、

$(a, b) = (\text{ア}, \text{イウ}), (\text{エオ}, \text{カ})$ であるから、

$z = \text{キ} - i, \text{クケ} + i$ である。

16 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 4 = 0$ の解は、 $x = \pm \text{ア} i$

(2) $x^2 + x + 1 = 0$ の解は、 $x = \frac{\text{イウ} \pm \sqrt{\text{エ}} i}{\text{オ}}$

(3) $4x^2 - 4x + 3 = 0$ の解は、 $x = \frac{\text{カ} \pm \sqrt{\text{キ}} i}{\text{ク}}$

【解答】 $(a, b) = (2, -1), (-2, 1)$

$z = 2 - i, -2 + i$

詳しい解説



【解答】 (1) $x = \pm 2i$ (2) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2}$

(3) $x = \frac{1 \pm \sqrt{2} i}{2}$

詳しい解説



17 m を定数とする2次方程式 $x^2 + mx + m = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = m^2 - \boxed{\text{ア}} m \text{ である。}$$

(1) 異なる2つの実数解をもつとき、 $m < \boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}} < m$

(2) 異なる2つの虚数解をもつとき、 $\boxed{\text{エ}} < m < \boxed{\text{オ}}$

(3) 重解をもつとき、

$$m = \boxed{\text{カ}} \text{ のとき、重解は } x = \boxed{\text{キ}}$$

$$m = \boxed{\text{ク}} \text{ のとき、重解は } x = \boxed{\text{ケコ}}$$

18 2次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{アイ}}, \alpha^3 + \beta^3 = \boxed{\text{ウエオ}}, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

【解答】 $D = m^2 - 4m$

(1) $m < 0, 4 < m$ (2) $0 < m < 4$

(3) $m = 0$ のとき $x = 0$ 、 $m = 4$ のとき $x = -2$

詳しい解説



【解答】 $\alpha^2 + \beta^2 = -2$ $\alpha^3 + \beta^3 = -10$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2}{3}$$

詳しい解説



19 2次方程式 $x^2 + mx + 18 = 0$ の2つの解のうち、1つの解が他の解の2倍であるとき、実数の定数 m の値と2つの解は、

$m =$ のとき、解は $x =$,

$m =$ のとき、解は $x =$,

20 次の問いに答えよ。

(1) 4次式 $x^4 - 9$ を因数分解すると、

有理数の範囲では

実数の範囲では

複素数の範囲では

選択肢：

① $(x^2 + 3)(x^2 - 3)$

② $(x^2 + 3)(x + 3)(x - 3)$

③ $(x^2 + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

④ $(x^2 - 3)(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)$

⑤ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)$

⑥ $(x + 3)(x - 3)(x + 3i)(x - 3i)$

(2) 2次式 $2x^2 - x + 1$ を複素数の範囲で因数分解すると、

$\left(x - \frac{\text{オ} + \sqrt{\text{カ}}i}{\text{キ}} \right) \left(x - \frac{\text{ク} - \sqrt{\text{ケ}}i}{\text{コ}} \right)$

【解答】 $m = -9$ のとき $x = 3, 6$

$m = 9$ のとき $x = -3, -6$

詳しい解説



【解答】 (1) ア ① イ ② ウ ④

(2) $2 \left(x - \frac{1 + \sqrt{7}i}{4} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{7}i}{4} \right)$

詳しい解説



21 和が 4、積が 12 である2数は、2次方程式 $x^2 - \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イウ}} = 0$ の解であるから、 $\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}i$ と $\boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}i$ となる。

22 2次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、
解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = \boxed{\text{ア}}$, $\alpha\beta = \boxed{\text{イ}}$
これより、 $\alpha + 1, \beta + 1$ を解とする2次方程式の1つは
 $x^2 - \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}} = 0$ となる。

【解答】 $x^2 - 4x + 12 = 0$ $2 + 2\sqrt{2}i$ と $2 - 2\sqrt{2}i$

詳しい解説



【解答】 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 3$ $x^2 - 4x + 6 = 0$

詳しい解説



23 次の問いに答えよ。

- (1) 整式 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ を $x - 1$ で割ったときの余りは である。
- (2) 整式 $P(x) = x^3 + ax^2 - 1$ を $x + 2$ で割ったときの余りが 3 であるとき、実数の定数 a の値は、 $a =$ である。

24 整式 $P(x) = 2x^3 + ax^2 + x - 1$ が $x + 1$ で割り切れるとき、

実数の定数 a の値は、 $a =$ であり、

$P(x) = (x + 1)($ $x^2 +$ $x -$ $)$ と因数分解できる。

【解答】 (1) 4 (2) $a = 3$

詳しい解説



【解答】 $a = 4$ $P(x) = (x + 1)(2x^2 + 2x - 1)$

詳しい解説



25 整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると余りが 1、 $x-2$ で割ると余りが 7 である。

$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}}$ である。

【解答】 $2x + 3$

詳しい解説



26 次の方程式を解け。

(1) $x^3 = 8$ の解は $x = \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イウ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{エ}}}i$

(2) $x^3 - 7x - 6 = 0$ の解は $x = \boxed{\text{オカ}}, \boxed{\text{キク}}, \boxed{\text{ケ}}$

(3) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ について、 $x^2 = t$ とおくと $t = \boxed{\text{コサ}}, \boxed{\text{シ}}$

よって、 x の解は $x = \pm\sqrt{\boxed{\text{ス}}}, \pm\boxed{\text{セ}}i$

【解答】 (1) $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$ (2) $x = -1, -2, 3$

(3) $t = -4, 3$ $x = \pm\sqrt{3}, \pm 2i$

詳しい解説



27 1 の3乗根のうち、虚数であるものの1つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^3 - 1 = \boxed{\text{ア}}$

(2) $\omega^2 + \omega = \boxed{\text{イウ}}$

(3) $\omega^5 + \omega^4 + 1 = \boxed{\text{エ}}$

(4) $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \boxed{\text{オカ}}$

【解答】 (1) 0 (2) -1 (3) 0 (4) -1

詳しい解説



28 a, b を実数の定数として、

3次方程式 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ の解の1つが $1 - 2i$ であるとき、

$a = \boxed{\text{ア}}, b = \boxed{\text{イウ}}$ であり、

この方程式の他の解は $\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}i, \boxed{\text{カ}}$ である。

【解答】 $a = 7, b = -5$ 他の解は $1 + 2i, 1$

詳しい解説

