

数学 II | 指数関数と対数関数

66 次の計算をせよ。ただし、 $a > 0$, $b > 0$ とする。

$$(1) (-2)^{-3} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$(2) 0.2^{-2} = \boxed{\text{エオ}}$$

$$(3) (a^2 b^{-1})^3 = \frac{a^{\boxed{\text{カ}}}}{b^{\boxed{\text{キ}}}}$$

$$(4) \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \boxed{\text{ク}}$$

$$(5) \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \boxed{\text{ケ}}$$

$$(6) \sqrt[6]{125} = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

$$(7) \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} = \sqrt[\boxed{\text{サ}}]{\boxed{\text{シ}}}$$

$$(8) 32^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}}$$

$$(9) 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}} \times 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}} = \boxed{\text{ソ}}$$

$$(10) \left(16^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}} = \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$$

$$(11) \sqrt{a^3} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[6]{a} = a^{\boxed{\text{ツ}}}$$

【解答】 (1) $-\frac{1}{8}$ (2) 25 (3) $\frac{a^6}{b^3}$ (4) 4
 (5) 2 (6) $\sqrt{5}$ (7) $\sqrt[3]{3}$ (8) $\frac{1}{4}$
 (9) $9^{\frac{1}{2}} = 3$ (10) $16^{\frac{1}{8}} = \sqrt{2}$ (11) a^2

詳しい解説



67 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ のとき、次の値を求めよ。

$$x + x^{-1} = \boxed{\text{ア}}, \quad x^2 + x^{-2} = \boxed{\text{イウ}}, \quad x^3 + x^{-3} = \boxed{\text{エオカ}}$$

68 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^{x+1} = 8$ の解は、 $x = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $9^x \leq 27$ の解は、 $x \boxed{\text{イ}} \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$ の解は、 $x \boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{イ}} \cdot \boxed{\text{オ}}$ の選択肢：① < ① ≤ ② > ③ ≥

【解答】 $x + x^{-1} = 7$ $x^2 + x^{-2} = 47$
 $x^3 + x^{-3} = 322$

詳しい解説



【解答】 (1) $x = 2$ (2) $x \leq \frac{3}{2}$ (①)
 (3) $x < 3$ (①)

詳しい解説



69 次の方程式、不等式を解け。

(1) $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$ は、 $2^x = t$ とおくと、

$t^2 + \text{ア}t - \text{イ} = 0$ と表されるから、 $t = \text{ウ}$ であり、 $x = \text{エ}$ である。

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 < 0$ は、 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ とおくと、

$\text{オ}t^2 - \text{カ}t + \text{キ} < 0$ と表されるから、

t の値の範囲は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}} < t < \text{コ}$ であり、

x の値の範囲は $\text{サ} < x < \text{シ}$ である。

70 $x \leq 2$ のとき、関数 $y = 4^x - 2^{x+1}$ は、

$2^x = t$ とおくと $y = t^2 - \text{ア}t$ と表される。

また、 $\text{イ} < t \leq \text{ウ}$ であるから、 y は

$t = \text{エ}$ すなわち $x = \text{オ}$ で最大値 カ をとり、

$t = \text{キ}$ すなわち $x = \text{ク}$ で最小値 ケコ をとる。

【解答】 (1) $t^2 + 2t - 8 = 0$, $t = 2$, $x = 1$

(2) $3t^2 - 4t + 1 < 0$, $\frac{1}{3} < t < 1$, $0 < x < 1$

詳しい解説



【解答】 $y = t^2 - 2t$, $0 < t \leq 4$

$t = 4$ すなわち $x = 2$ で最大値 8

$t = 1$ すなわち $x = 0$ で最小値 -1

詳しい解説



71 $y = 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x})$ は $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと

$y = t^2 - \text{ア}t - \text{イ}$ となり、 $t \geq \text{ウ}$ であるから、

y は $t = \text{エ}$ すなわち $x = \text{オ}$ で最小値 カキ をとる。

72 次の計算をせよ。

(1) $\log_{10} 0.01 = \text{アイ}$

(2) $\log_4 2 = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$

(3) $\log_{10} 4 + 2 \log_{10} 5 = \text{オ}$

(4) $\log_3 24 - 3 \log_3 2 = \text{カ}$

(5) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = \text{キ}$

(6) $\log_3 6 - \log_9 4 = \text{ク}$

(7) $(\log_3 2 + \log_9 4)(\log_2 3 + \log_4 3) = \text{ケ}$

【解答】 $y = t^2 - 2t - 2, t \geq 2$

$t = 2$ すなわち $x = 0$ で最小値 -2

詳しい解説



【解答】 (1) -2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2

(4) 1 (5) 3 (6) 1 (7) 3

詳しい解説



73 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ のとき、次の値を a , b を用いて表せ。

(1) $\log_{10} 72 = \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イ}} b$

(2) $\log_{10} 5 = \boxed{\text{ウ}} - a$

(3) $\log_{12} 27 = \frac{\boxed{\text{エ}} b}{\boxed{\text{オ}} a + b}$

74 次の $\boxed{\quad}$ 内に適する番号を入れよ。

(1) $y = 2^x$ と $y = 2^{-x}$ のグラフは $\boxed{\text{ア}}$ 。

(2) $y = 2^{-x}$ と $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{イ}}$ 。

(3) $y = \log_2 x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ウ}}$ 。

(4) $y = \log_2 x$ と $y = 2^x$ のグラフは $\boxed{\text{エ}}$ 。

選択肢：① 同一のものである

① x 軸に関して対称である

② y 軸に関して対称である

③ 原点に関して対称である

④ 直線 $y = x$ に関して対称である

【解答】 (1) $\log_{10} 72 = 3a + 2b$ (2) $\log_{10} 5 = 1 - a$

(3) $\log_{12} 27 = \frac{3b}{2a + b}$

詳しい解説



【解答】 (1) ② (y 軸に関して対称である)

(2) ① (同一のものである)

(3) ① (x 軸に関して対称である)

(4) ④ (直線 $y = x$ に関して対称である)

詳しい解説



75 次の各組の数の大小を比較して、小さい順に並べよ。

(1) ① 1 ① 2 ② $\sqrt[3]{4}$ ③ $\sqrt[5]{8}$ $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}}$

(2) ① $\sqrt{2}$ ① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt[6]{7}$ $\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}} < \boxed{\text{キ}}$

(3) ① 1 ① $\log_2 3$ ② $\log_4 25$ $\boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}} < \boxed{\text{コ}}$

(4) ① $\log_{\frac{1}{2}} 3$ ① $\log_{\frac{1}{2}} 5$ ② $\log_{\frac{1}{2}} 7$ $\boxed{\text{サ}} < \boxed{\text{シ}} < \boxed{\text{ス}}$

76 次の方程式、不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1) = 3$ の解は、 $x = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$ の解は、 $\boxed{\text{イ}} < x < \boxed{\text{ウ}}$ である。

【解答】 (1) $1 < \sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4} < 2$ (③②①)

(2) $\sqrt[6]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (②①①)

(3) $1 < \log_2 3 < \log_4 25$ (①①②)

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 7 < \log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 3$ (②①①)

詳しい解説



【解答】 (1) $x = 9$ (2) $0 < x < 2$

詳しい解説



77 次の方程式、不等式を解け。

(1) $\log_2 x + \log_2(x - 1) = 1$ の解は、 $x = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $2\log_2 x < \log_2(x + 6)$ の解は、 $\boxed{\text{イ}} < x < \boxed{\text{ウ}}$ である。

78 方程式 $(\log_2 x)^2 - \log_2 4x = 0$ は、

$\log_2 x = t$ とおくと、 $t^2 - t - \boxed{\text{ア}} = 0$ と表されるから、

$t = \boxed{\text{イウ}}, \boxed{\text{エ}}$ であり、 $x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \boxed{\text{キ}}$ である。

【解答】 (1) $x = 2$ (2) $0 < x < 3$

詳しい解説



【解答】 $t^2 - t - 2 = 0$

$$t = -1, 2, x = \frac{1}{2}, 4$$

詳しい解説



79 $1 \leq x \leq 8$ のとき、関数 $y = (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x$ は、

$\log_2 x = t$ とおくと $y = t^2 - \text{ア} t$ と表される。

また、 $\text{イ} \leq t \leq \text{ウ}$ であるから、 y は

$t = \text{エ}$ すなわち $x = \text{オ}$ で最大値 カ をとり、

$t = \text{キ}$ すなわち $x = \text{ク}$ で最小値 ケコ をとる。

80 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(1) 2^{31} は アイ 桁の整数である。

(2) 2^{-20} は小数第 ウ 位で初めて 0 でない数字が現れる。

【解答】 $y = t^2 - 4t$, $0 \leq t \leq 3$

$t = 0$ すなわち $x = 1$ で最大値 0

$t = 2$ すなわち $x = 4$ で最小値 -4

詳しい解説



【解答】 (1) 10 桁 (2) 小数第 7 位

詳しい解説

