

数学 II | 微分と積分

81 関数 $f(x) = x^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) x が 2 から 5 まで変化するときの平均変化率は、

$$\frac{f(\boxed{\text{ア}}) - f(\boxed{\text{イ}})}{\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}} = \boxed{\text{オ}}$$

(2) $x = 3$ における微分係数 $f'(3)$ は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\boxed{\text{カ}} + h) - f(\boxed{\text{キ}})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + \boxed{\text{ク}}) = \boxed{\text{ケ}}$$

82 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = x^3$ の導関数は、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\boxed{\text{ア}}) - f(\boxed{\text{イ}})}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\boxed{\text{エ}} x^2 + \boxed{\text{オ}} xh + h^2) = \boxed{\text{カ}} x^{\boxed{\text{キ}}}$$

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$ の選択肢：① x ② h ③ $x + h$ ④ $x - h$ ⑤ x^2

(2) 次の関数を微分せよ。

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \text{ のとき、} f'(x) = \boxed{\text{ク}} x^2 - \boxed{\text{ケ}} x + \boxed{\text{コ}}$$

$$f(x) = (x - 1)(x + 3) \text{ のとき、} f'(x) = \boxed{\text{サ}} x + \boxed{\text{シ}}$$

【解答】 (1) $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 7$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 6) = 6$

詳しい解説



【解答】 (1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

(ア ② イ ① ウ ①)

(2) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ 、 $f'(x) = 2x + 2$

詳しい解説



83 2次関数 $f(x)$ が $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f'(0) = -3$ を満たすとき、

$$f(x) = \boxed{\text{ア}}x^2 - \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}}, f'(2) = \boxed{\text{エ}}$$

84 曲線 $y = x^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) 点 $(2, 4)$ における接線の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ であり、

接線の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}x - \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 傾き -2 の接線の接点は $(\boxed{\text{エオ}}, \boxed{\text{カ}})$ であり、

接線の方程式は $y = \boxed{\text{キク}}x - \boxed{\text{ケ}}$ である。

【解答】 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $f'(2) = 5$

詳しい解説



【解答】 (1) 傾き 4 , $y = 4x - 4$

(2) 接点 $(-1, 1)$, $y = -2x - 1$

詳しい解説



- 85 曲線 $y = x^2$ に点 $A(2, -5)$ から引いた接線の方程式は、
 $y = \boxed{\text{アイ}}x - \boxed{\text{ウエ}}$ と $y = \boxed{\text{オカ}}x - \boxed{\text{キ}}$ である。

- 86 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx$ と放物線 $y = 2x^2$ は
点 $(-1, 2)$ を共有点にもち、この点で共通な接線 ℓ をもつ。
このとき、 $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イ}}$ であり、
 ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{ウエ}}x - \boxed{\text{オ}}$ である。

【解答】 $y = 10x - 25$ $y = -2x - 1$

詳しい解説



【解答】 $a = 4$ $b = 1$ ℓ の方程式 $y = -4x - 2$

詳しい解説



87 関数 $y = x^3 - 3x$ の増減は、

$x \leq$ アイ, ウ $\leq x$ で単調に増加し、

エオ $\leq x \leq$ カ で単調に減少する。

また、 $x =$ キク で極大値 ケ、 $x =$ コ で極小値 サシ をとる。

88 関数 $y = x^3 - 3x$ ($-2 \leq x \leq 3$) について、

$x =$ ア で最大値 イウ、 $x =$ エオ、カ で最小値 キク をとる。

【解答】 $x \leq -1, 1 \leq x$ で単調に増加

$-1 \leq x \leq 1$ で単調に減少

$x = -1$ で極大値 2 $x = 1$ で極小値 -2

詳しい解説



【解答】 $x = 3$ で最大値 18 $x = -2, 1$ で最小値 -2

詳しい解説



89 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が

$x = -3$ で極大値、 $x = 1$ で極小値 -4 をとるとき、定数 a, b, c の値は、

$a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イウ}}$ 、 $c = \boxed{\text{エ}}$ であり、 $f(x)$ の極大値は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

90 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x$ について、

(1) $f(x)$ が極大値と極小値をもつのは、 $a < \boxed{\text{アイ}}$ 、 $\boxed{\text{ウ}} < a$ のときである。

(2) $f(x)$ が極値をもたないのは、 $\boxed{\text{エオ}} \leq a \leq \boxed{\text{カ}}$ のときである。

【解答】 $a = 3$ $b = -9$ $c = 1$ 極大値 $f(-3) = 28$

詳しい解説



【解答】 (1) $a < -3$ 、 $3 < a$ (2) $-3 \leq a \leq 3$

詳しい解説



91 3次方程式 $x^3 - 3x - a = 0$ について、実数解の個数は、

$a < \boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}} < a$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ 個

$a = \boxed{\text{オカ}}, \boxed{\text{キ}}$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ 個

$\boxed{\text{ケコ}} < a < \boxed{\text{サ}}$ のとき $\boxed{\text{シ}}$ 個である。

92 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (3x + 2)^2 dx = \boxed{\text{ア}} x^3 + \boxed{\text{イ}} x^2 + \boxed{\text{ウ}} x + C$$

$$(2) \int (t - 1)(t + 3) dt = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} t^3 + t^2 - \boxed{\text{カ}} t + C$$

【解答】 $a < -2, 2 < a$ のとき 1 個

$a = -2, 2$ のとき 2 個

$-2 < a < 2$ のとき 3 個

詳しい解説



【解答】 (1) $3x^3 + 6x^2 + 4x + C$ (2) $\frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + C$

詳しい解説



93 曲線 $y = f(x)$ は点 $(0, 3)$ を通り、この曲線上の点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが $x^2 - x$ で表されるとき、

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x^3 - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x^2 + \boxed{\text{オ}} \text{ である。}$$

94 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 (3x^2 - 4x - 5) dx = \boxed{\text{アイ}}$$

$$(2) \int_{-1}^1 (t - 1)(t + 3) dt = \frac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

$$(3) \int_2^3 (x + 1)^2 dx - \int_2^3 (x - 1)^2 dx = \boxed{\text{キク}}$$

$$(4) \int_{-1}^0 (3x^2 + 2x) dx - \int_2^0 (3x^2 + 2x) dx = \boxed{\text{ケコ}}$$

$$(5) \int_0^3 |x^2 - 4| dx = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

【解答】 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3$

詳しい解説



【解答】 (1) -6 (2) $-\frac{16}{3}$ (3) 10
(4) 12 (5) $\frac{23}{3}$

詳しい解説



95 関数 $f(x)$ が等式 $f(x) = 3x^2 - 2x + \int_0^2 f(t) dt$ を満たすとき、
 $\int_0^2 f(t) dt = a$ とおくと、
 $a = \boxed{\text{アイ}}$ となり、 $f(x) = \boxed{\text{ウ}}$ $x^2 - \boxed{\text{エ}}$ $x - \boxed{\text{オ}}$ である。

96 関数 $f(x)$ と定数 a が等式 $\int_a^x f(t) dt = x^2 + 3x - 10$ を満たすとき、
 $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ $x + \boxed{\text{イ}}$ で、 $a = \boxed{\text{ウエ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ である。

【解答】 $a = -4$ $f(x) = 3x^2 - 2x - 4$

詳しい解説



【解答】 $f(x) = 2x + 3$ $a = -5, 2$

詳しい解説



97 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y = x^2 - 2x + 3$ と x 軸、 y 軸、直線 $x = 3$ で囲まれた図形の面積は、 $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 曲線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積は、 $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(3) 曲線 $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和は、 $\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(4) 曲線 $y = x^2 + x - 1$ と直線 $y = 2x + 1$ で囲まれた図形の面積は、 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(5) 2曲線 $y = x^2 + 3x - 7$ と $y = -x^2 + x + 5$ で囲まれた図形の面積は、 $\frac{\boxed{\text{コサン}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

【解答】 (1) 9 (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{37}{12}$
(4) $\frac{9}{2}$ (5) $\frac{125}{3}$

詳しい解説



98 放物線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$, $(-3, 9)$ における接線の方程式は、

$$y = \boxed{\text{ア}}x - \boxed{\text{イ}}, y = \boxed{\text{ウエ}}x - \boxed{\text{オ}}$$

2本の接線の交点の x 座標は $x = \boxed{\text{カキ}}$ であり、

この放物線と2本の接線で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

【解答】 $y = 2x - 1$ $y = -6x - 9$ $x = -1$ 面積 $\frac{16}{3}$

詳しい解説

